CRPE

# 100

# jours pour réviser les maths du CRPE

Reprendre les bases pas à pas,
même après des années sans maths

⏱ 20 minutes par jour

**EXTRAIT : JOURS 1 À 10**



# Mode d'emploi

*Une journée, c'est vingt minutes et deux ou trois pages. Toujours dans le même ordre, pour que tu prennes vite tes repères.*

**Pour commencer**
Une question qui piège, pour réveiller la curiosité.

**L'essentiel**
Le cours, court et précis.

**Exemple guidé**
La méthode appliquée pas à pas.

**À toi**
Trois exercices, dont une petite situation-problème.

**Côté enseignant**
Une erreur d'élève analysée, comme à l'oral.

**À retenir**
La phrase à garder en tête.

Les corrigés détaillés sont à la fin de chaque journée. Essaie vraiment avant de les lire : c'est en cherchant qu'on apprend, pas en relisant.

## Les 10 premiers jours : les nombres


1. Chiffres et nombres, la valeur de position
2. Les nombres décimaux, comparer sans se faire piéger
3. Ordres de grandeur et calcul mental, vérifier avant de calculer
4. Multiplier et diviser par 10, 100, 0,1
5. La division euclidienne
6. Multiples, diviseurs et critères de divisibilité
7. Nombres premiers et décomposition
8. Les fractions, ce qu'elles veulent dire
9. Comparer des fractions et trouver des fractions égales
10. Bilan, un exercice au format concours

JOUR 1

# Chiffres et nombres, la valeur de position

20 minutes

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

**POUR COMMENCER**

## Combien y a-t-il de dizaines dans 2 438 ?

Si tu as répondu 3, tu es en bonne compagnie : c'est la réponse de la plupart des adultes. Pourtant, il y en a 243. Le 3 est le chiffre des dizaines. Le nombre de dizaines, lui, compte toutes les dizaines contenues dans 2 438. À la fin de cette journée, tu ne confondras plus les deux.

**L'ESSENTIEL**

Notre façon d'écrire les nombres repose sur deux idées.

Elle est décimale : on regroupe par dix. Dix unités font une dizaine, dix dizaines une centaine, dix centaines un millier. Dans l'autre sens, une unité partagée en dix donne des dixièmes, un dixième partagé en dix donne des centièmes.

Elle est positionnelle : un même chiffre n'a pas la même valeur selon sa place. Dans 2 438, le 4 vaut 400. Dans 4 382, il vaut 4 000.

Le tableau de numération rend cela visible :

| milliers | centaines | dizaines | unités | dixièmes | centièmes |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 3 | 8 | | |

On peut alors décomposer 2 438 de plusieurs façons, toutes justes :
2 438 = 2 × 1 000 + 4 × 100 + 3 × 10 + 8
2 438 = 24 centaines + 38 unités
2 438 = 243 dizaines + 8 unités

C'est la dernière qui donne la réponse à la question du début. Pour trouver le nombre de dizaines, on lit tout ce qui est à gauche de la colonne des dizaines, cette colonne comprise.

**EXEMPLE GUIDÉ**

Prenons 30 572.
Le chiffre des centaines est 5.
Le nombre de centaines est 305 (on lit 3, 0, 5 en s'arrêtant à la colonne des centaines).
Le nombre de milliers est 30.
On peut donc écrire 30 572 = 305 centaines + 72 unités.

Vérification rapide : 305 × 100 = 30 500, et 30 500 + 72 = 30 572.

**À TOI**

1. Dans 74 019, quel est le chiffre des centaines ? Quel est le nombre de centaines ?
2. Écris le nombre formé de 4 dizaines, 15 unités et 3 dixièmes.
3. Un grossiste a reçu 12 650 crayons. Il les range dans des boîtes de 100. Combien de boîtes peut-il remplir entièrement ? Combien de crayons restera-t-il ?

## Côté enseignant

Une élève de CE2 doit écrire en chiffres « deux mille trente ». Elle écrit : 200030.

### Que fait l'élève ?

Elle écrit ce qu'elle entend, morceau par morceau : « deux mille » donne 2000, « trente » donne 30, et elle les colle bout à bout.

### Que révèle sa production ?

Elle connaît l'écriture de chaque morceau, mais elle n'a pas compris que la position d'un chiffre lui donne sa valeur.

### Comment la faire progresser ?

En revenant au tableau de numération et au matériel (barres de dix, plaques de cent), puis en faisant dire « 2 milliers, 0 centaine, 3 dizaines, 0 unité » avant d'écrire.

C'est le type d'analyse qu'on attend de toi à l'oral : décrire, expliquer l'erreur, proposer une remédiation.

**À RETENIR**

**Le chiffre des dizaines est un seul chiffre. Le nombre de dizaines est tout ce qui se trouve à gauche de la colonne des dizaines, cette colonne comprise.**

**CORRIGÉS**

1. Le chiffre des centaines est 0. Le nombre de centaines est 740. Le 0 piège souvent : il ne veut pas dire qu'il n'y a « pas de centaines », seulement que le chiffre des centaines est nul.
2. 4 dizaines = 40, 15 unités = 15, 3 dixièmes = 0,3. Total : 40 + 15 + 0,3 = 55,3. Le piège serait d'écrire les chiffres à la suite (4153) : 15 unités dépassent la colonne des unités, il faut faire une retenue.
3. On cherche le nombre de centaines dans 12 650 : 126. Il peut remplir 126 boîtes, et il restera 50 crayons. Vérification : 126 × 100 + 50 = 12 650.

JOUR 2

# Les nombres décimaux, comparer sans se faire piéger

20 minutes

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

**? POUR COMMENCER**

## Lequel est le plus grand : 0,5 ou 0,25 ?

Beaucoup d'élèves répondent 0,25, « parce que 25 est plus grand que 5 ». Et plus d'un adulte pressé hésite une seconde. Pourtant 0,5, c'est une moitié, et 0,25 un quart. La moitié l'emporte.

**! L'ESSENTIEL**

Un nombre décimal a une partie entière (avant la virgule) et une partie décimale (après). Chaque chiffre de la partie décimale a un rang : dixièmes, centièmes, millièmes.

0,5 = 5 dixièmes = 50 centièmes.
0,25 = 2 dixièmes et 5 centièmes = 25 centièmes.

Pour comparer deux décimaux, on compare d'abord les parties entières. Si elles sont égales, on compare les chiffres rang par rang, de gauche à droite : d'abord les dixièmes, puis les centièmes, et ainsi de suite. Dès qu'un chiffre est plus grand, on a la réponse.

Une autre méthode consiste à donner aux deux nombres le même nombre de chiffres après la virgule en ajoutant des zéros à droite : 0,50 et 0,25. On compare alors 50 centièmes et 25 centièmes.

Attention à la place du zéro. Un zéro ajouté à droite de la partie décimale ne change rien (0,5 = 0,50). Un zéro glissé juste après la virgule change tout (0,5 n'est pas égal à 0,05).

Dernière propriété, souvent oubliée : entre deux décimaux, on peut toujours en trouver un autre. Entre 2,3 et 2,4, il y a 2,35, 2,31, 2,399... Il n'y a pas de « décimal suivant ».

**EXEMPLE GUIDÉ**

Rangeons 3,08 ; 3,8 ; 3,15 ; 3,1 dans l'ordre croissant.

Toutes les parties entières valent 3. On complète avec des zéros : 3,08 ; 3,80 ; 3,15 ; 3,10.
On compare les centièmes ainsi obtenus : 8, 80, 15, 10.
Ordre croissant : 3,08 < 3,1 < 3,15 < 3,8.

**À TOI**

1. Compare 12,7 et 12,69.
2. Trouve un nombre compris entre 4,9 et 5.
3. Sur un 100 mètres, Léa court en 12,8 s, Sami en 12,75 s et Inès en 12,08 s. Donne le classement de la course.

## Côté enseignant

Un élève écrit : 2,12 > 2,9, « parce que 12 est plus grand que 9 ».

### Que fait l'élève ?

Il lit la partie décimale comme un nombre entier à part.

### Que révèle sa production ?

Il applique aux décimaux une règle qui marche pour les entiers : « plus il y a de chiffres, plus le nombre est grand ». C'est une généralisation abusive. On rencontre aussi l'erreur inverse : des élèves qui ont retenu que « les centièmes sont plus petits que les dixièmes » et en déduisent qu'un nombre avec plus de chiffres après la virgule est toujours plus petit. Ils écrivent alors 3,45 < 3,4.

### Comment le faire progresser ?

En faisant lire les nombres avec leurs rangs (« 2 unités et 9 dixièmes », « 2 unités, 1 dixième et 2 centièmes »), en les plaçant sur une droite graduée, ou en passant par la monnaie : 2,90 € ou 2,12 €, personne n'hésite.

**À RETENIR**

**On compare deux décimaux rang par rang, de gauche à droite. Le nombre de chiffres après la virgule ne dit rien de la taille du nombre.**

**CORRIGÉS**

1. Parties entières égales (12). Dixièmes : 7 contre 6. Donc 12,7 > 12,69. Avec la méthode des zéros : 12,70 > 12,69.
2. Par exemple 4,95 (ou 4,91, 4,999…). Il y en a une infinité.
3. Le gagnant est celui qui a le plus petit temps. On compare 12,80 ; 12,75 ; 12,08. Classement : Inès (12,08 s), Sami (12,75 s), Léa (12,8 s). Le piège serait de croire que 12,75 est plus grand que 12,8 parce que 75 est plus grand que 8.

JOUR 3

# Ordres de grandeur et calcul mental, vérifier avant de calculer

⏱ 20 minutes

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

**? POUR COMMENCER**

## Sans poser l'opération, 48 × 21 est-il plus proche de 100, de 1 000 ou de 10 000 ?

48, c'est presque 50. 21, c'est presque 20. Et 50 × 20 = 1 000. Le résultat exact (1 008) confirme l'estimation. Cinq secondes de réflexion suffisent pour éviter une erreur d'un facteur 10.

**! L'ESSENTIEL**

Calculer un ordre de grandeur, c'est remplacer chaque nombre par un nombre proche et simple, puis calculer de tête. On s'en sert pour trois choses : prévoir un résultat, repérer une erreur (une virgule mal placée se voit tout de suite) et contrôler la vraisemblance d'une réponse. Le jury du CRPE y tient : une réponse absurde non commentée coûte cher.

Quelques outils de calcul mental qui reviennent sans cesse :
décomposer : 25 × 12 = 25 × 4 × 3 = 100 × 3 = 300 ;
compenser : 199 + 57 = 200 + 57 − 1 = 256 ;
multiplier par 5, c'est multiplier par 10 puis diviser par 2 : 46 × 5 = 460 ÷ 2 = 230.

**→ EXEMPLE GUIDÉ**

Un élève trouve 3,72 × 5,1 = 189,72. Est-ce plausible ?

Ordre de grandeur : 3,72 est proche de 4, 5,1 est proche de 5. 4 × 5 = 20. Son résultat est environ dix fois trop grand : la virgule est mal placée. Le bon résultat est 18,972, qui est bien proche de 20.

**À TOI**

1. Donne un ordre de grandeur de 312 × 0,49.
2. Calcule de tête 25 × 36.
3. Une classe de 28 élèves part en sortie. Le car coûte 412 € et l'entrée au musée 7,90 € par élève. Le budget est de 600 €. Sans calcul posé, dis si le budget suffit, puis vérifie.

## Côté enseignant

Un élève calcule 0,4 × 0,2 et trouve 0,8.

### Que fait l'élève ?

Il multiplie 4 par 2 et garde un seul chiffre après la virgule, comme dans les nombres de départ.

### Que révèle sa production ?

Il pense que multiplier rend toujours plus grand, une idée vraie pour les entiers. Or multiplier par 0,2, c'est prendre 2 dixièmes d'un nombre : le résultat doit être plus petit que 0,4. Un ordre de grandeur l'aurait arrêté.

### Comment le faire progresser ?

Avec un carré unité quadrillé en 10 × 10 : on colorie un rectangle de 0,4 sur 0,2, soit 4 carreaux sur 2. On obtient 8 petits carreaux sur 100, donc 0,08.

**À RETENIR**

**Avant un calcul, une estimation. Après, une comparaison. Si les deux sont très éloignés, c'est le calcul qui a tort.**

**CORRIGÉS**

1. 312 est proche de 300, 0,49 est proche de 0,5. 300 × 0,5 = 150. (Valeur exacte : 152,88.)
2. 25 × 36 = 25 × 4 × 9 = 100 × 9 = 900.
3. 28 × 7,90 est un peu moins que 28 × 8 = 224. 412 + 224 = 636, qui dépasse 600 de plus de 30 €. Même en retirant les quelques centimes surestimés, le budget ne suffit pas. Calcul exact : 28 × 7,90 = 221,20 € ; 412 + 221,20 = 633,20 €. Il manque 33,20 €.

JOUR 4

# Multiplier et diviser par 10, 100, 0,1

20 minutes

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

**POUR COMMENCER**

**« Pour multiplier par 10, on ajoute un zéro. » Essaie avec 37 : 370, ça marche. Essaie avec 3,7 : 3,70… qui vaut toujours 3,7. La règle est fausse dès qu'il y a une virgule. Elle est même dangereuse, parce qu'elle a l'air de marcher.**

**L'ESSENTIEL**

Multiplier par 10, c'est donner à chaque chiffre une valeur dix fois plus grande. Dans le tableau de numération, chaque chiffre glisse d'un rang vers la gauche : les unités deviennent des dizaines, les dixièmes deviennent des unités.

Multiplier par 100 : deux rangs vers la gauche. Par 1 000 : trois rangs.
Diviser par 10 : un rang vers la droite. Par 100 : deux rangs.

Et les nombres plus petits que 1 ?
Multiplier par 0,1, c'est prendre un dixième du nombre, donc diviser par 10.
Multiplier par 0,01, c'est diviser par 100.
Diviser par 0,1, c'est chercher combien de dixièmes il y a dans le nombre, donc multiplier par 10.

**EXEMPLE GUIDÉ**

Prenons 4,56.
4,56 × 100 : le 4 passe des unités aux centaines. On obtient 456.
4,56 ÷ 10 : chaque chiffre recule d'un rang. On obtient 0,456.
4,56 × 0,1 = 4,56 ÷ 10 = 0,456.
4,56 ÷ 0,1 = 4,56 × 10 = 45,6.

**À TOI**

1. Calcule 0,07 × 1 000.
2. Calcule 523 × 0,01, puis 8 ÷ 0,1.
3. Une ramette de 500 feuilles mesure 5 cm d'épaisseur. Quelle est l'épaisseur d'une feuille, en millimètres ?

## Côté enseignant

Un élève écrit : 2,5 × 10 = 2,50.

*Que fait l'élève ?*

Il applique la règle « on ajoute un zéro ».

*Que révèle sa production ?*

Il a appris une recette valable pour les entiers, sans en comprendre le sens. Le zéro ajouté à droite d'une partie décimale ne change pas la valeur du nombre.

*Comment le faire progresser ?*

En revenant au tableau de numération pour faire glisser les chiffres, ou à la monnaie : 10 objets à 2,50 € coûtent 25 €, pas 2,50 €. Le contrôle par l'ordre de grandeur (jour 3) fonctionne aussi : 2,5 × 10, c'est forcément plus que 20.

**À RETENIR**

**Multiplier par 10, c'est rendre chaque chiffre dix fois plus grand : les chiffres glissent d'un rang vers la gauche. Multiplier par 0,1, c'est diviser par 10.**

**CORRIGÉS**

1. 0,07 × 1 000 = 70 (le 7 des centièmes glisse de trois rangs et devient des dizaines).
2. 523 × 0,01 = 523 ÷ 100 = 5,23. Et 8 ÷ 0,1 = 8 × 10 = 80 (il y a 80 dixièmes dans 8).
3. 5 cm = 50 mm. 50 ÷ 500 = 0,1. Une feuille mesure 0,1 mm d'épaisseur, soit un dixième de millimètre. Contrôle de vraisemblance : c'est très fin, comme une feuille de papier.

JOUR 5

# La division euclidienne

⏱ 20 minutes

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

**? POUR COMMENCER**

## 50 personnes doivent se rendre à un mariage dans des voitures de 4 places. Combien faut-il de voitures ?

La calculatrice affiche 12,5. Mais on ne commande pas une demi-voiture. Il en faut 13. Le calcul est juste, et pourtant il ne donne pas directement la réponse.

**! L'ESSENTIEL**

Faire la division euclidienne de a par b, c'est trouver deux entiers q et r tels que :
a = b × q + r, avec r plus petit que b.

a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste.

La condition « r plus petit que b » est essentielle : si le reste dépasse le diviseur, on pouvait encore faire un groupe de plus.

La division sert à deux types de problèmes. Le partage : on répartit 50 bonbons entre 4 enfants, combien chacun ? Le groupement : on fait des groupes de 4 avec 50 personnes, combien de groupes ? Dans les deux cas, le sens du reste dépend de la question posée.

**→ EXEMPLE GUIDÉ**

Division euclidienne de 157 par 12.
12 × 13 = 156, et 12 × 14 = 168, trop grand.
Donc 157 = 12 × 13 + 1. Le quotient est 13, le reste est 1.

L'égalité 157 = 12 × 12 + 13 est vraie, mais ce n'est pas la division euclidienne de 157 par 12 : le reste 13 dépasse le diviseur 12.

**À TOI**

1. Effectue la division euclidienne de 250 par 7.
2. L'égalité 100 = 9 × 10 + 10 traduit-elle la division euclidienne de 100 par 9 ? Justifie, puis écris la bonne égalité.
3. Un fleuriste a 87 roses. Il fait des bouquets de 6 roses. Combien de bouquets complets peut-il faire ? Combien de roses doit-il acheter en plus pour faire un bouquet supplémentaire ?

## Côté enseignant

Pour le problème des voitures, un élève écrit : « 50 = 4 × 12 + 2. Il faut 12 voitures. »

*Que fait l'élève ?*

Il effectue correctement la division et donne le quotient comme réponse.

*Que révèle sa production ?*

Il s'arrête au calcul sans revenir à la situation. Le reste est traité comme un déchet, alors qu'il représente 2 personnes qui n'ont pas de place.

*Comment le faire progresser ?*

En faisant dessiner ou jouer la situation, puis en demandant : « Que deviennent les 2 personnes qui restent ? » Plus largement, en prenant l'habitude de rédiger une phrase-réponse qui reprend la question.

**À RETENIR**

**Dans une division euclidienne, le reste est toujours plus petit que le diviseur. Et la réponse au problème n'est pas toujours le quotient.**

**CORRIGÉS**

1. $7 \times 35 = 245$ et $7 \times 36 = 252$, trop grand. Donc $250 = 7 \times 35 + 5$. Quotient 35, reste 5.
2. Non : le reste 10 est plus grand que le diviseur 9, on peut encore faire un groupe de 9. La bonne égalité est $100 = 9 \times 11 + 1$.
3. $87 = 6 \times 14 + 3$. Il peut faire 14 bouquets et il reste 3 roses. Pour un 15e bouquet, il lui manque $6 - 3 = 3$ roses.

JOUR 6

# Multiples, diviseurs et critères de divisibilité

⏱ 20 minutes

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

**? POUR COMMENCER**

## On veut répartir 4 512 bonbons dans 3 sachets identiques, sans couper de bonbon. Est-ce possible ?

Pas besoin de poser la division. 4 + 5 + 1 + 2 = 12, et 12 est dans la table de 3. Donc 4 512 est divisible par 3 : chaque sachet contiendra 1 504 bonbons.

**! L'ESSENTIEL**

On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier k tel que a = b × k.

Quatre phrases disent exactement la même chose :
a est un multiple de b ;
b est un diviseur de a ;
a est divisible par b ;
le reste de la division euclidienne de a par b est 0.

Les critères de divisibilité à connaître :
par 2 : le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
par 5 : le chiffre des unités est 0 ou 5 ;
par 10 : le chiffre des unités est 0 ;
par 3 : la somme des chiffres est un multiple de 3 ;
par 9 : la somme des chiffres est un multiple de 9 ;
par 4 : le nombre formé par les deux derniers chiffres est un multiple de 4.

Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, on les cherche par paires dont le produit donne ce nombre, en partant de 1 et en s'arrêtant quand les paires se croisent.

**EXEMPLE GUIDÉ**

2 340 est-il divisible par 2, 3, 4, 5, 9, 10 ?
Il se termine par 0 : divisible par 2, 5 et 10.
2 + 3 + 4 + 0 = 9 : divisible par 3 et par 9.
Ses deux derniers chiffres forment 40, multiple de 4 : divisible par 4.

Diviseurs de 36, par paires : 1 × 36, 2 × 18, 3 × 12, 4 × 9, 6 × 6.
Liste : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

**À TOI**

1. 7 245 est-il divisible par 2 ? par 3 ? par 5 ? par 9 ?
2. Donne la liste de tous les diviseurs de 48.
3. Une enseignante a 48 crayons et 36 gommes. Elle veut préparer des trousses identiques en utilisant tout le matériel. Combien de trousses peut-elle faire au maximum ? Que contiendra chaque trousse ?

## Côté enseignant

Un élève affirme : « 123 n'est pas divisible par 3, parce qu'il ne se termine pas par 3, 6 ou 9. »

*Que fait l'élève ?*
Il regarde le dernier chiffre, comme pour 2 et 5.

*Que révèle sa production ?*
Il transpose un critère d'un nombre à un autre sans savoir pourquoi il fonctionne. Or 1 + 2 + 3 = 6, et 123 = 3 × 41.

*Comment le faire progresser ?*
Par des contre-exemples : 13 se termine par 3 mais n'est pas divisible par 3 ; 12 ne se termine pas par 3, 6 ou 9 et pourtant il l'est. On peut ensuite chercher avec lui pourquoi le dernier chiffre suffit pour 2 et 5 (10 est un multiple de 2 et de 5) mais pas pour 3.

**À RETENIR**

**« Multiple de », « diviseur de », « divisible par » décrivent la même relation, vue de deux côtés. Pour 2, 5 et 10, on regarde le dernier chiffre. Pour 3 et 9, la somme des chiffres.**

**CORRIGÉS**

1. 7 245 se termine par 5 : pas divisible par 2, divisible par 5. 7 + 2 + 4 + 5 = 18 : divisible par 3 et par 9.
2. Paires : 1 × 48, 2 × 24, 3 × 16, 4 × 12, 6 × 8. Diviseurs : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.
3. Le nombre de trousses doit diviser à la fois 48 et 36. Diviseurs de 48 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48. Diviseurs de 36 : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Le plus grand diviseur commun est 12. Elle peut faire 12 trousses, contenant chacune 48 ÷ 12 = 4 crayons et 36 ÷ 12 = 3 gommes.

JOUR 7

# Nombres premiers et décomposition

20 minutes

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

**POUR COMMENCER**

## 1 est-il un nombre premier ?

Non. Et ce n'est pas un caprice de mathématicien. Un nombre premier a exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même. Le nombre 1 n'en a qu'un seul.

**L'ESSENTIEL**

Les nombres premiers inférieurs à 30 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Le nombre 2 est le seul nombre premier pair.

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers, et d'une seule façon (à l'ordre près). C'est la décomposition en facteurs premiers. Pour l'obtenir, on divise successivement par 2 autant que possible, puis par 3, puis par 5, puis par 7, et ainsi de suite.

Pour savoir si un nombre est premier, on teste les divisions par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11… On peut s'arrêter dès que le carré du nombre premier testé dépasse le nombre étudié.

**EXEMPLE GUIDÉ**

Décomposons 360.
$360 = 2 \times 180 = 2 \times 2 \times 90 = 2 \times 2 \times 2 \times 45$.
$45 = 3 \times 15 = 3 \times 3 \times 5$.
Donc $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Le nombre 91 est-il premier ? Il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. Mais $91 = 7 \times 13$. Il n'est pas premier, et il piège beaucoup de monde.

**À TOI**

1. Décompose 84 en produit de facteurs premiers.
2. 97 est-il un nombre premier ?
3. Deux phares clignotent, l'un toutes les 12 secondes, l'autre toutes les 18 secondes. Ils s'allument ensemble à 20 h pile. À quelle heure s'allumeront-ils de nouveau en même temps ?

## Côté enseignant

Un élève affirme : « 51 est premier, parce qu'il n'est ni dans la table de 2, ni dans celle de 5, ni dans celle de 10. »

*Que fait l'élève ?*

Il teste seulement les diviseurs dont le critère se voit sur le dernier chiffre.

*Que révèle sa production ?*

Il confond souvent « impair » et « premier », et ses tests sont incomplets. Or 5 + 1 = 6, donc 51 est divisible par 3 : 51 = 3 × 17.

*Comment le faire progresser ?*

En installant une méthode systématique (tester 2, 3, 5, 7 dans l'ordre) et en construisant avec la classe le crible d'Ératosthène, qui fait apparaître les nombres premiers jusqu'à 100.

**À RETENIR**

**Un nombre premier a exactement deux diviseurs. 1 n'est pas premier, 2 est le seul premier pair. Tout entier se décompose en produit de nombres premiers d'une seule façon.**

**CORRIGÉS**

1. $84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$.
2. On teste 2, 3, 5, 7. 97 est impair ; 9 + 7 = 16, pas multiple de 3 ; il ne se termine ni par 0 ni par 5 ; $7 \times 13 = 91$ et $7 \times 14 = 98$. On peut s'arrêter là, car $11 \times 11 = 121$ dépasse 97. Donc 97 est premier.
3. On cherche le plus petit nombre qui soit à la fois multiple de 12 et de 18. $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$. Il faut prendre chaque facteur avec sa plus grande puissance : $2^2 \times 3^2 = 36$. Les phares se rallumeront ensemble 36 secondes plus tard, à 20 h 00 min 36 s.

JOUR 8

# Les fractions, ce qu'elles veulent dire

20 minutes

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

**POUR COMMENCER**

## Trois pizzas pour quatre amis. Quelle part reçoit chacun ?

On peut couper chaque pizza en quatre et donner un quart de chaque pizza à chacun : 3 quarts. On peut aussi calculer 3 ÷ 4 = 0,75. Les deux réponses désignent le même nombre : $\frac{3}{4}$.

**L'ESSENTIEL**

Une fraction $\frac{a}{b}$ s'écrit avec un numérateur a (en haut) et un dénominateur b (en bas). Elle a plusieurs sens, et le CRPE attend que tu les connaisses tous.

Le partage : on partage l'unité en b parts égales et on en prend a. $\frac{3}{4}$ d'une tablette, c'est 3 parts d'une tablette coupée en 4.

Le quotient : $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a. $\frac{3}{4} \times 4 = 3$. C'est aussi le résultat de a ÷ b.

Le nombre : une fraction a sa place sur la droite graduée, comme les entiers et les décimaux.

Une fraction peut dépasser 1 : $\frac{7}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$.

Une fraction décimale a pour dénominateur 10, 100, 1 000… : 0,75 = $\frac{75}{100}$.

Pour calculer une fraction d'une quantité, on divise par le dénominateur puis on multiplie par le numérateur : $\frac{3}{5}$ de 40 €, c'est 40 ÷ 5 × 3 = 24 €.

**EXEMPLE GUIDÉ**

Plaçons $\frac{5}{3}$ sur une droite graduée.

On partage chaque unité en 3 parts égales (des tiers).

On compte 5 tiers à partir de 0 : 3 tiers font 1, il reste 2 tiers.

$\frac{5}{3}$ se place entre 1 et 2, aux deux tiers du chemin : $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$.

**À TOI**

1. Écris 2,35 sous la forme d'une fraction décimale.
2. Combien de minutes y a-t-il dans $\frac{3}{4}$ d'heure ?
3. Un club compte 150 adhérents. $\frac{2}{5}$ d'entre eux jouent au tennis, et $\frac{1}{3}$ des joueurs de tennis sont des enfants. Combien d'enfants jouent au tennis ?

## Côté enseignant

On demande à une élève de colorier $\frac{1}{4}$ d'un rectangle. Elle le partage en 4 morceaux de tailles différentes et en colorie un.

*Que fait l'élève ?*

Elle retient « 4 parts, on en prend 1 ».

*Que révèle sa production ?*

Elle a oublié l'essentiel : les parts doivent être égales. Pour elle, la fraction compte des morceaux, elle ne mesure pas une quantité.

*Comment la faire progresser ?*

Par la manipulation : plier une bande de papier en 4, superposer les parts pour vérifier qu'elles sont identiques, puis comparer avec un partage inégal.

**À RETENIR**

**$\frac{a}{b}$, c'est l'unité partagée en b parts égales dont on prend a. C'est aussi le nombre a ÷ b. Une fraction est un nombre : elle a sa place sur la droite graduée.**

**CORRIGÉS**

1. 2,35 = 235 centièmes = $\frac{235}{100}$.
2. 60 ÷ 4 × 3 = 45 minutes.
3. Joueurs de tennis : 150 ÷ 5 × 2 = 60. Enfants parmi eux : 60 ÷ 3 = 20. Vingt enfants jouent au tennis. Le piège serait de calculer $\frac{1}{3}$ de 150 : la deuxième fraction porte sur les joueurs de tennis, pas sur tout le club.

JOUR 9

# Comparer des fractions et trouver des fractions égales

20 minutes

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

**POUR COMMENCER**

## Lequel est le plus grand : $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ ?

Le réflexe « 5 est plus grand que 4 » pousse vers $\frac{1}{5}$. Pourtant, une pizza partagée entre 4 donne de plus grosses parts qu'une pizza partagée entre 5. $\frac{1}{4}$ est plus grand que $\frac{1}{5}$.

**L'ESSENTIEL**

Fractions égales. On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant (ou en divisant) son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul :
$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{75}{100}$.

Simplifier une fraction, c'est diviser le haut et le bas par un diviseur commun. Une fraction est irréductible quand ils n'ont plus de diviseur commun autre que 1. Les jours 6 et 7 servent ici : la décomposition en facteurs premiers montre tout de suite les diviseurs communs.

Comparer deux fractions :
même dénominateur : on compare les numérateurs ($\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$) ;
même numérateur : la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur ($\frac{1}{4} > \frac{1}{5}$) ;
sinon, on les écrit avec un même dénominateur ;
on peut aussi les comparer à un repère simple comme 1 ou $\frac{1}{2}$.

**EXEMPLE GUIDÉ**

Comparons $\frac{5}{6}$ et $\frac{7}{9}$.

Un dénominateur commun : 18 (multiple de 6 et de 9).

$\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ et $\frac{7}{9} = \frac{14}{18}$.

$\frac{15}{18} > \frac{14}{18}$, donc $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$.

Simplifions $\frac{42}{56}$.

$42 = 2 \times 3 \times 7$ et $56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$. Diviseur commun : $2 \times 7 = 14$.

$\frac{42}{56} = \frac{3}{4}$.

**À TOI**

1. Range dans l'ordre croissant : $\frac{2}{3}$ ; $\frac{3}{4}$ ; $\frac{5}{8}$.
2. Rends irréductible la fraction $\frac{45}{60}$.
3. Dans l'école A, 18 élèves sur 24 mangent à la cantine. Dans l'école B, 21 élèves sur 30. Dans quelle école la proportion d'élèves qui mangent à la cantine est-elle la plus forte ?

## Côté enseignant

Un élève écrit : $\frac{2}{3} = \frac{3}{4}$, « parce que j'ai ajouté 1 en haut et en bas ».

### Que fait l'élève ?

Il ajoute le même nombre au numérateur et au dénominateur.

### Que révèle sa production ?

Il raisonne de façon additive là où la situation est multiplicative. C'est l'un des pièges les plus fréquents, chez les élèves comme chez les adultes.

### Comment le faire progresser ?

Avec deux bandes de papier de même longueur : l'une partagée en tiers, l'autre en quarts. $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ ne se superposent pas. Par contre, $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$ se superposent exactement : on a multiplié le haut et le bas par 2.

**À RETENIR**

**On peut multiplier ou diviser le haut et le bas d'une fraction par un même nombre, jamais ajouter. À numérateur égal, plus le dénominateur est grand, plus la fraction est petite.**

**CORRIGÉS**

1. Dénominateur commun 24 : $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$ ; $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$ ; $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$. Ordre croissant : $\frac{5}{8} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.
2. 45 et 60 sont divisibles par 15 : $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$.
3. École A : $\frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. École B : $\frac{21}{30} = \frac{7}{10} = 0{,}7$. La proportion est plus forte dans l'école A, même si l'école B a plus d'élèves à la cantine en nombre. C'est la différence entre comparer des effectifs et comparer des proportions.

JOUR 10

# Bilan, un exercice au format concours

⏱ 20 minutes, sans calculatrice

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

*Aujourd'hui, pas de cours. Un seul problème, rédigé comme au concours, qui mobilise les neuf premiers jours. Prends le temps de justifier chaque réponse : au CRPE, le raisonnement compte autant que le résultat.*

## ✎ LE PROBLÈME : LA KERMESSE DE L'ÉCOLE

Une école organise une kermesse.

1. Les tickets de tombola sont vendus par carnets de 10. On a imprimé 1 386 tickets. Combien de carnets complets peut-on former ? Combien de tickets restera-t-il ?
2. Chaque ticket coûte 1,50 €. Tous les carnets complets sont vendus. Donne d'abord un ordre de grandeur de la recette, puis calcule-la exactement.
3. La recette est partagée ainsi : $\frac{2}{5}$ pour une sortie scolaire, $\frac{1}{3}$ pour la bibliothèque, le reste pour du matériel de sport.
   a. Calcule le montant de chaque part.
   b. Quelle fraction de la recette est consacrée au matériel de sport ?
4. Pour les lots, l'école dispose de 84 peluches et de 60 jeux de cartes. Elle veut composer des paniers identiques en utilisant tous les lots. Combien de paniers peut-elle faire au maximum ? Que contient chaque panier ?
5. Un élève de CM2 à qui l'on pose la question 2 calcule 1 380 × 1,50 et trouve 207 €. Analyse son erreur.

## CORRIGÉS

1. 1 386 = 10 × 138 + 6. On forme 138 carnets complets, il reste 6 tickets. (Jours 1 et 5 : le nombre de dizaines de 1 386 est 138.)
2. Tickets vendus : 138 × 10 = 1 380. Ordre de grandeur : 1 400 × 1,5 = 2 100 €. Calcul exact : 1 380 × 1,50 = 1 380 + 690 = 2 070 €. Le résultat est cohérent avec l'estimation. (Jour 3.)
3. a. Sortie : 2 070 ÷ 5 × 2 = 828 €. Bibliothèque : 2 070 ÷ 3 = 690 €. Matériel de sport : 2 070 − 828 − 690 = 552 €.
   b. $1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{15}{15} - \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{4}{15}$. Vérification : 2 070 ÷ 15 × 4 = 552 €. (Jours 8 et 9.)
4. Le nombre de paniers doit diviser 84 et 60. $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. Le plus grand diviseur commun est $2^2 \times 3 = 12$. On peut faire 12 paniers contenant chacun 7 peluches et 5 jeux de cartes. (Jours 6 et 7.)
5. L'élève trouve un résultat environ dix fois trop petit : l'ordre de grandeur (2 100 €) aurait dû l'alerter. Il a sans doute calculé 1 380 × 15 = 20 700, puis placé la virgule en comptant deux chiffres après la virgule, comme dans 1,50. Il a supprimé le zéro de 1,50 tout en gardant les deux décimales : 207,00. Remédiation : faire estimer avant de calculer et vérifier après (jour 3), et travailler le sens de 1,50 (1 unité et 5 dixièmes, soit 1,5). (Jours 3 et 4.)

## TON BILAN

Si tu as bloqué sur la question 1, reprends les jours 1 et 5.
Sur la question 2, les jours 3 et 4.
Sur la question 3, les jours 8 et 9.
Sur la question 4, les jours 6 et 7.
Sur la question 5, relis les rubriques « Côté enseignant » : c'est exactement ce que le jury attendra de toi à l'oral.

# Bravo, 10 jours de faits !

Tu viens de reprendre les fondations : la valeur des chiffres, les décimaux, le calcul, la divisibilité et les fractions. Tout le reste s'appuie dessus.

Le livre complet poursuit pendant 90 jours, jusqu'au niveau attendu à l'écrit du concours.

**En attendant la suite**

Un défi de maths par jour dans l'application Rituel Maths (Google Play et App Store), et des articles sur le concours sur rituel-maths.fr

*Vingt minutes par jour, c'est tout. Mais c'est tous les jours.*